Vnější kalkulus

Jako příklad práce v *Mathematice* si uážeme zavedení aparátu pro práci s antisymetrickými formami, vnějším násobením a vnější derivací.

■ Dimenze variety

Proměnná **dimension** bude obsahovat dimenzi variety. Nastevení dimenze nebude nezbytně potřeba. Její zadání však zajistí, že formy vyššího stupně vymizí.

```
In[1]:= ClearAll[dimension]
```

```
In[2]:= dimension = 10;
```

■ Deklarace form

Nejprve musíme *Mathematicu* naučit, které výrazy jsou antisymetrické formy. Zavedeme proto funkci **afdegree[α]**, která bude vracet stupeň formy **α**. Pokud α není forma, **afdegree[α]** vrátí nulu.

```
In[3]:= ClearAll[afdegree]
```

Pokud není určeno jinak, **afdegree** vrací nulu.

```
In[4]:= afdegree[_] := 0
```

Pravidla pro určení stupně součtu a součinu form:

```
In[5]:= afdegree[a_Plus] := Max @@ (afdegree /@ (List @@ a))
```

```
In[6]:= afdegree[a_Times] := Plus @@ (afdegree /@ (List @@ a))
```

```
In[7]:= afdegree[a_Wedge] := Plus @@ (afdegree /@ (List @@ a))
```

Nakonec pravidlo pro určení stupně formy získané vnějším diferencováním.

```
In[8]:= afdegree[exD[f_]] := 1 + afdegree[f]
```

■ Příklady

Pro další požití si deklarujeme několik antisymetrických forem.

```
In[9]:= afdegree[α] = 1;
        afdegree[β] = 1;
        afdegree[γ] = 1;
```

```
In[10]:= afdegree[aa] = 2;
         afdegree[bb] = 2;
         afdegree[cc] = 2;
```

```
In[11]:= afdegree[aaa] = 3;
         afdegree[bbb] = 3;
         afdegree[ccc] = 3;
```

■ Přehled definic

Definice funkce **afdegree** nyní vypadá následovně.

```
In[12]:= Definition[afdegree]

Out[12]= afdegree[aa] = 2

         afdegree[aaa] = 3

         afdegree[bb] = 2

         afdegree[bbb] = 3

         afdegree[cc] = 2

         afdegree[ccc] = 3

         afdegree[α] = 1

         afdegree[β] = 1

         afdegree[γ] = 1

         afdegree[a_Plus] := Max@@afdegree/@List@@a

         afdegree[a_Times] := Plus@@afdegree/@List@@a

         afdegree[a_Wedge] := Plus@@afdegree/@List@@a

         afdegree[exD[f_]] := 1 + afdegree[f]

         afdegree[_] := 0
```

■ Vnější násobení

Nyní můžeme přikročit k definování vnějšího násobení. To provedeme postupným zadáním základních vlastností.

Při definování vlastností vnějšího násobení budeme používat plný zápis **Wedge[a,b,...]** místo zkráceného **a∧b∧...**. V definicích je takovýto zápis přehlednější a bezpečnější.

```
In[13]:= ClearAll[Wedge]
```

Nejprve pravila pro degenerované případy vnějšího násobení.

```
In[14]:= Wedge[] = 1;
```

```
In[15]:= Wedge[x_] := x
```

Vnější násobení je asociativní a distributivní.

```
In[16]:= Wedge[b___, HoldPattern[Wedge[w__]], e___] := Wedge[b, w, e]
```

```
In[17]:= HoldPattern[Wedge[b___, x_ + y_, e___]] := Wedge[b, x, e] + Wedge[b, y, e]
```

HoldPattern[*vzor*] způsobí, že vzor nebude vyčíslen. Pokud bychom nepoužili **HoldPattern**, vzor **Wedge[...]** by se vypočetl pomocí již zadaného pravidla pro **Wedge**.

Formálně připouštíme výrazy $\alpha \wedge f \wedge \beta$, kde **f** je obyčejná funkce (forma stupně nula). V tomto případě můžeme **f** vytknout. Stejně tak pro výrazy typu $\alpha \wedge (f\ \beta) \wedge \gamma$.

```
In[18]:= Wedge[b___, f_ , e___] := f Wedge[b, e] /; afdegree[f] == 0
```

```
In[19]:= Wedge[b___, f_ m_, e___] := f Wedge[b, m, e] /; afdegree[f] == 0
```

Vnější součin dvou totožných forem lichého stupně je nula.

```
In[20]:= Wedge[___, α_, ___, α_, ___] := 0 /; OddQ[afdegree[α]]
```

Vnější součin je antisymetrický. Abychom docílili správné porovnávání součinů skládajících se ze stejných členů, avšak seřazených v jiném pořadí, uspořádáme činitele vždy do standardního pořadí.

```
In[21]:= Wedge[b___, x_, y_, e___] := (-1)^(afdegree[x] afdegree[y]) Wedge[b, y, x, e] /; Order[x, y] == -1
```

Order[x,y] vrací **1**,**0** nebo **−1** podle uspořádání **x** a **y**.

Pokud je stupeň výsledné antisymetrické formy vyšší než dimenze, forma je nulová.

```
In[22]:= Wedge[a___] := 0 /; Plus @@ afdegree /@ {a} > dimension
```

■ Příklady

Asociativita:

```
In[23]:= bb ∧ (f aa ∧ (3 γ))

Out[23]= 3 f aa ∧ bb ∧ γ
```

Forma příliš vysokého stupně:

```
In[24]:= α ∧ aa ∧ bb ∧ aaa ∧ bbb

Out[24]= 0
```

Součin dvou stejných členů:

```
In[25]:= bbb ∧ α ∧ (aaa ∧ β) ∧ aaa

Out[25]= 0
```

Distributivita a součin stejných členů:

```
In[26]:= t z bb ∧ (β + γ) ∧ (α + β + γ)

Out[26]= t z (-(bb ∧ α ∧ β) - bb ∧ α ∧ γ)

In[27]:= % // Simplify

Out[27]= -t z (bb ∧ α ∧ β + bb ∧ α ∧ γ)
```

■ Vnější derivace

Nakonec definujeme vnější derivaci **exD**.

Nejprve zavedeme funkci **constantQ** — pokud **constantQ[f]** vrátí **True**, **f** bude považováno za konstantu.

```
In[28]:= ClearAll[exD, constantQ]
```

Derivace je lineární vůči sčítání a násobení konstantním číslem.

```
In[29]:= exD[a_ + b_] := exD[a] + exD[b]
```

```
In[30]:= exD[_?NumberQ] := 0
```

```
In[31]:= exD[_?constantQ] := 0
```

K derivování složené funkce použijeme totální derivaci **Dt**.

```
In[32]:= exD[fc_[a__]] := (Dt[fc[a]] /. Dt -> exD)
```

Pravidla derivování součinu a vnějšího násobení:

```
In[33]:= exD[HoldPattern[f_ w_]] := exD[f] ∧ w + f exD[w] /; afdegree[f] == 0
```

```
In[34]:= exD[HoldPattern[w_ ∧ e___]] := Wedge[exD[w], e] + (-1)^afdegree[w] Wedge[w, exD[Wedge[e]]]
```

Vnější derivace vnější derivace je nula:

```
In[35]:= exD[exD[_]] := 0
```

Derivace vedoucí k formě stupně vyššího než dimenze je nula.

```
In[36]:= exD[w_] := 0 /; afdegree[w] ≥ dimension
```

■ Příklady

Deklarace κ za konstantu:

```
In[37]:= constantQ[κ] = True;
```

Derivování obecné lineární kombinace forem:

```
In[38]:= exD[ g aa ∧ (3 β) + α ∧ β] // Expand

Out[38]= 3 g aa ∧ exD[β] - α ∧ exD[β] - 3 g β ∧ exD[aa] + β ∧ exD[α] - 3 aa ∧ β ∧ exD[g]
```

Derivace z konstanty a vnější derivace:

```
In[39]:= exD[κ aa + f exD[β] ]

Out[39]= κ exD[aa] + exD[f] ∧ exD[β]
```

Derivace složené funkce:

```
In[40]:= exD[h[r, s] α]

Out[40]= exD[α] h[r, s] - α ∧ exD[s] h^(0,1)[r, s] - α ∧ exD[r] h^(1,0)[r, s]
```

■ Přehled definic

Tím jsme završili definice vnějšího násobení a vnější derivace. Ještě uvedeme přehled všech definic v pořadí, v jakém se budou vykonávat.

```
In[41]:= Definition[Wedge]

Out[41]= Wedge[] = 1

         Wedge[x_] := x

         b___ ∧ HoldPattern[Wedge[w__]] ∧ e___ := b ∧ w ∧ e

         HoldPattern[b___ ∧ (x_ + y_) ∧ e___] := b ∧ x ∧ e + b ∧ y ∧ e

         b___ ∧ (f_ m_) ∧ e___ := f b ∧ m ∧ e /; afdegree[f] == 0

         b___ ∧ f_ ∧ e___ := f b ∧ e /; afdegree[f] == 0

         ___ ∧ α_ ∧ ___ ∧ α_ ∧ ___ := 0 /; OddQ[afdegree[α]]

         b___ ∧ x_ ∧ y_ ∧ e___ := (-1)^(afdegree[x] afdegree[y]) b ∧ y ∧ x ∧ e /; Order[x, y] == -1

         Wedge[a___] := 0 /; Plus@@afdegree/@{a} > dimension

In[42]:= Definition[exD]

Out[42]= exD[a_ + b_] := exD[a] + exD[b]

         exD[_?NumberQ] := 0

         exD[_?constantQ] := 0

         exD[HoldPattern[f_ w_]] := exD[f] ∧ w + f exD[w] /; afdegree[f] == 0

         exD[HoldPattern[w_ ∧ e___]] := exD[w] ∧ e + (-1)^afdegree[w] w ∧ exD[Wedge[e]]

         exD[exD[_]] := 0

         exD[fc_[a__]] := Dt[fc[a]] /. Dt → exD

         exD[w_] := 0 /; afdegree[w] ≥ dimension
```

■ Elektromagnetické pole v Kerr-Newmanově prostoročase

```
In[43]:= dimension = 4;
```

```
In[44]:= constantQ[q] = True; constantQ[a] = True;
```

Vektorový potenciál elektromagnetického pole:

```
In[45]:= potA = -(q r)/ρ^2 (exD[t] - a Sin[ϑ]^2 exD[φ]);
```

Tenzor elektromagnetického pole je dán vnější derivací potenciálu.

```
In[46]:= exD[potA]
```

$$\text{Out[46]}= -q\left(\frac{\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[t]-a\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[\varphi]}{\rho^2}+r\left(\frac{2\,\text{exD}[t]\wedge\text{exD}[\rho]}{\rho^3}-\frac{2\,a\,\text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\vartheta]\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi]}{\rho^2}+\frac{2\,a\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,\text{exD}[\rho]\wedge\text{exD}[\varphi]}{\rho^3}\right)\right)$$

Dosadíme za ρ, *Mathematica* provede vnější derivace a pak zpětně zavedeme ρ.

```
In[47]:= % /. ρ -> Sqrt[r^2 + a^2 Cos[ϑ]^2]
```

$$\text{Out[47]}= -q\left(\frac{\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[t]-a\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[\varphi]}{r^2+a^2\,\text{Cos}[\vartheta]^2}+r\left(\frac{-2\,r\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[t]-2\,a^2\,\text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\vartheta]\,\text{exD}[t]\wedge\text{exD}[\vartheta]}{\left(r^2+a^2\,\text{Cos}[\vartheta]^2\right)^2}-\frac{2\,a\,\text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\vartheta]\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi]}{r^2+a^2\,\text{Cos}[\vartheta]^2}+\frac{a\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,(2\,r\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[\varphi]-2\,a^2\,\text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\vartheta]\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi])}{\left(r^2+a^2\,\text{Cos}[\vartheta]^2\right)^2}\right)\right)$$

```
In[48]:= % /. r^2 + a^2 Cos[ϑ]^2 -> ρ^2 // Simplify
```

$$\text{Out[48]}= \frac{1}{\rho^4}(q\,((2\,r^2-\rho^2)\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[t]+a\,(-(2\,r^2-\rho^2)\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[\varphi]+r\,(a\,\text{Sin}[2\,\vartheta]\,\text{exD}[t]\wedge\text{exD}[\vartheta]+2\,a^2\,\text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\vartheta]^3\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi]+\rho^2\,\text{Sin}[2\,\vartheta]\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi])))$$

Vytkneme členy s vnějším součinem.

```
Map[Collect[#, _Wedge]&, %, 1]
```

$$\frac{1}{\rho^4}(q\,((2\,r^2-\rho^2)\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[t]-a\,(2\,r^2-\rho^2)\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[\varphi]+a^2\,r\,\text{Sin}[2\,\vartheta]\,\text{exD}[t]\wedge\text{exD}[\vartheta]+(2\,a^3\,r\,\text{Cos}[\vartheta]\,\text{Sin}[\vartheta]^3+a\,r\,\rho^2\,\text{Sin}[2\,\vartheta])\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi]))$$

Dosadíme za ρ v koeficientu u posledního vnějšího součinu.

```
MapAt[Simplify[# /. ρ^2 -> r^2 + a^2 Cos[ϑ]^2]&, %, {3, 4}]
```

$$\frac{1}{\rho^4}(q\,((2\,r^2-\rho^2)\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[t]-a\,(2\,r^2-\rho^2)\,\text{Sin}[\vartheta]^2\,\text{exD}[r]\wedge\text{exD}[\varphi]+a^2\,r\,\text{Sin}[2\,\vartheta]\,\text{exD}[t]\wedge\text{exD}[\vartheta]+a\,r\,(a^2+r^2)\,\text{Sin}[2\,\vartheta]\,\text{exD}[\vartheta]\wedge\text{exD}[\varphi]))$$

Čímž jsem dostali výraz, který lze nalézt např. v MTW.