Kvantové grupy a konstrukce reprezentací (seminář)

Pavel Šťovíček

MMF UK, Troja, 12. 10. 1999

Obsah

1 Geometrické kvantování

Vycházíme ze symplektické variety (M, ω), kde ω je uzavřená nedegenerovaná 2-forma. To jest pro každý bod $m \in M$ je

$$\omega_m : T_m M \times T_m M \to \mathbb{R},$$

antisymetrické bilineární zobrazení, $d\omega = 0$, a zobrazení, které přiřazuje tečným vektorům $X \in T_m M$ funkcionály z duálního prostoru $\varphi_X \in T_m^* M$ podle předpisu

$$\varphi_X(Y) = \omega(X, Y), \qquad \forall Y \in T_m M\,,$$

je prosté a tedy vzájemně jednoznačné.

Vnější derivace libovolné funkce $f \in C^\infty(M)$ je 1-forma df (připomeňme, že funkcionál $df_m \in T_m M$ je určen vztahem $df_m(X) = X \cdot f(m)$, kde symbol na pravé straně má význam derivace funkce ve směru tečného vektoru).V každém bodě $m \in M$ existuje právě jeden tečný vektor $\gamma_f(m)$, který splňuje

$$df_m(\cdot) = \omega_m(\gamma_f(m), \cdot\,)\,.$$

Tím je jednoznačně určeno zobrazení

$$\gamma : C^\infty(M) \ni f \mapsto \gamma_f \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{1}$$

Zde symbol $\mathfrak{X}(M)$ značí prostor hladkých vektorových polí na M.

Symplektická struktura na M implikuje poissonovskou strukturu. $(M, \{\,,\,\})$ je Poissonova varieta s Poissonovou závorkou (první rovnost můžeme považovat za definici, další dvě se snadno odvodí)

$$\{f, g\} = \gamma_f \cdot g = -\gamma_g \cdot f = -\omega(\gamma_f, \gamma_g)\,. \tag{2}$$

Připomeňme, že vektorová pole tvoří nekonečnorozměrnou Lieovou algebrou $(\mathfrak{X}, [\,,\,])$, když Lieova závorka je jednoduše zavedena jako komutátor. Přitom na vektorová pole pohlížíme jako na diferenciální operátory 1. řádu a tedy jako na zobrazení prostoru hladkých funkcí do sebe. Komutátor dvou vektorových polí je opět vektorové pole. Dále prostor hladkých funkcí s Poissonovou závorkou se stává rovněž nekonečnorozměrnou Lieovou algebrou $(C^\infty(M), \{\,,\,\})$. Zobrazení (1)

$$\gamma : (C^\infty(M), \{\,,\,\}) \to (\mathfrak{X}(M), [\,,\,])$$

je homomorfismem Lieových algeber, to jest platí

$$\gamma_{\{f,g\}} = [\gamma_f, \gamma_g]\,. \tag{3}$$

Symplektická forma je podle předpokladu uzavřená, $d\omega = 0$, a lokálně ji lze vždy vyjádřit ve tvaru $\omega = d\nu$ pro vhodnou 1-formu ν (na topologicky triviálních varietách jako je euklidovský prostor ν existuje dokonce globálně). Připomeňme vztah pro vnější derivaci 1-formy:

$$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{X}(M), \quad d\nu(\xi, \eta) = \xi \cdot \nu(\eta) - \eta \cdot \nu(\xi) - \nu([\xi, \eta])\,. \tag{4}$$

Základem geometrického kvantování je zobrazení ϱ, které každé funkci $f \in C^\infty(M)$ přiřadí diferenciální operátor (zprvu definovaný na prostoru hladkých funkcí) podle předpisu ($\imath = \sqrt{-1}$)

$$\varrho(f) = \imath\gamma_f + \nu(\gamma_f) + f\,. \tag{5}$$

Povšimněme si, že $\nu(\gamma_f)$ je 1-forma aplikovaná na vektorové pole a tedy funkce. Ve vztahu (5) používame stejný symbol pro operátor násobení určitou funkcí jako pro samotnou funkci (v tomto případě $\nu(\gamma_f)$ a f). S využitím identit (2), (3), (4) není těžké odvodit komutační vztah, který má zásadní význam, a sice

$$[\varrho(f), \varrho(g)] = \imath\, \varrho(\{f, g\})\,. \tag{6}$$

Skutečně,

$$\begin{aligned}
[\varrho(f),\, \varrho(g)] &= -[\gamma_f,\, \gamma_g] + \imath(\gamma_f \cdot \nu(\gamma_g) - \gamma_g \cdot \nu(\gamma_f) + \gamma_f \cdot g - \gamma_g \cdot f) \\
&= -\gamma_{\{f,g\}} + \imath(d\nu(\gamma_f,\, \gamma_g) + \nu([\gamma_f,\, \gamma_g]) + 2\{f,\, g\}) \\
&= \imath(\imath\gamma_{\{f,g\}} - \{f,\, g\} + \nu(\gamma_{\{f,g\}}) + 2\{f,\, g\}) \\
&= \imath\, \varrho(\{f,\, g\})\,.
\end{aligned}$$

Na první pohled by se tento výsledek mohl zdát ideální. Každé funkci f na M byl přiřazen operátor $\varrho(f)$, přičemž komutátor operátorů je ve shodě s Poissonovou závorkou. Na následujícím příkladu ale předvedeme, že pro některé funkce, které jsou zajímavé z hlediska kvantové mechaniky, působí operátory (5) v "příliš velkém prostoru", který je tudíž nutno dále redukovat. Obecná metoda, jak řešit tento problém, je založena na pojmu *polarizace*, kterým se ale v tomto krátkém textu nebudeme blíže zabývat a spokojíme se místo toho s jednoduchým příkladem.

Příklad: $M = \mathbb{R}^2$

Buď $M = \mathbb{R}^2$ se souřadnicovými funkcemi p, q a $\omega = dp \wedge dq$. Zvolme $\nu = p\,dq$. Vektorové pole γ_f je určeno vztahy

$$\begin{aligned}
&\omega(\gamma_f,\, \cdot\,) = (\gamma_f \cdot p)\, dq - (\gamma_f \cdot q)\, dp \\
&= df = \frac{\partial f}{\partial p}\, dp + \frac{\partial f}{\partial q}\, dq\,,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\gamma_f = \frac{\partial f}{\partial q}\, \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\, \frac{\partial}{\partial q}\,.$$

Poissonova závorka je dána předpisem (2),

$$\{f,\, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\, \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\, \frac{\partial g}{\partial q}\,.$$

Geometrické kvantování (5) vede na operátory

$$\varrho(f) = \imath\, \left(\frac{\partial f}{\partial q}\, \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\, \frac{\partial}{\partial q} \right) - p\, \frac{\partial f}{\partial p} + f\,.$$

Specielně,

$$\varrho(q) = \imath\, \frac{\partial}{\partial p} + q, \quad \varrho(p) = -\imath\, \frac{\partial}{\partial q}\,.$$

Jak bylo předesláno, prostor, ve kterém působí operátory $\varrho(q)$ a $\varrho(p)$, lze redukovat. V tomto jednoduchém případě se řešení nabízí samo. Oba operátory komutují s derivací $\partial/\partial p$ a tedy podprostor funkcí, které splňují $\partial f/\partial p = 0$ (nezávisí na souřadnici p), je invariantní. Po této redukci dostáváme všem dobře známé operátory

$$\varrho(q) = q, \quad \varrho(p) = -\imath\, \frac{\partial}{\partial q}\,.$$

Je třeba ale zdůraznit, že tuto redukci lze uplatnit pouze na určitou podtřídu operátorů, specielně na $\varrho(q)$ a $\varrho(p)$, nikoli však obecně na operátor $\varrho(f)$ příslušný zcela libovolné funkci f.

2 Metoda orbit

Metoda orbit je vlastně geometrická konstrukce reprezentací Lieových algeber a grup. Postup je shodný s geometrickým kvantováním, ovšem symplektické variety a třídy funkcí, které chceme kvantovat (přiřadit jim operátory), jsou přesně vymezeny a přirozeně závisí na dané Lieově grupě. I v případě metody orbit se nebudeme pouštět do podrobného výkladu a omezíme se na ilustrativní příklad, kterým bude Lieova grupa $G = SU(2)$.

Nejprve přece jen několik obecných poznámek. Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra a $\mathfrak{g}^*$ duální vektorový prostor. Hodnotu funkcionálu $f \in \mathfrak{g}^*$ na vektoru $X \in \mathfrak{g}$ budeme značit jako $\langle f, X \rangle$ (tím je zdůrazněna dualita mezi prostory $\mathfrak{g}^*$ a $\mathfrak{g}$). Každému prvku $X \in \mathfrak{g}$ přiřadíme lineární funkci λ_X na $\mathfrak{g}^*$ vztahem

$$\lambda_X(f) = \langle f, X \rangle, \quad f \in \mathfrak{g}^* . \tag{7}$$

Na $\mathfrak{g}^*$ existuje právě jedna Poissonova závorka, která splňuje

$$\{\lambda_X, \lambda_Y\} = \lambda_{[X,Y]} . \tag{8}$$

To jest Poissonova závorka je nejprve předepsána na funkcích λ_X a potom se jednoznačně prodlužuje na všechny funkce z prostoru $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Zmiňme se o vztahu mezi symplektickými a poissonovskými varietami. V předcházející části jsme využili přechodu od symplektické formy k Poissonově závorce. V opačném směru platí následující obecný výsledek. Na každé poissonovské varietě $(M, \{\,,\,\})$ existuje jednoznačně určené rozvrstvení (tzv. foliace), jehož všechny listy jsou symplektické podvariety variety M. V obecném případě mohou být ve foliaci zastoupeny listy různé, ale vždy nutně sudé dimenze. Je-li $\mathcal{O} \subset M$ list foliace, potom Poissonova závorka na $\mathcal{O}$ určená příslušnou symplektickou strukturou je rovna zúžení původní Poissonovy závorky definované na M:

$$\{f\,|_{\mathcal{O}}, g|_{\mathcal{O}}\} = \{f, g\}|_{\mathcal{O}}, \quad \forall f, g \in C^\infty(M) .$$

Níže rozebereme příklad, ve kterém je symplektická foliace Poissonovy variety $M = \mathbb{R}^3$ tvořena sférami se středem v počátku coby 2-rozměrnými symplektickými varietami a počátkem jako 0-rozměrnou varietou.

Rovněž na duálním prostoru $\mathfrak{g}^*$ existuje jednoznačně určená foliace, jejíž listy jsou symplektické variety. Tyto listy se přesně shodují s orbitami tzv. koadjungované (coadjoint) akce. Blíže se touto akcí zabývat nebudeme, ale názvosloví "orbita" se přidržíme. V metodě orbit se vychází právě z těchto orbit coby symplektických variet a kvantují se funkce na dané orbitě $\mathcal{O}$ získané zúžením funkcí λ_X (7).

Lieova algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ je tvořena antihermitovskými maticemi rozměru 2×2 s nulovou stopou. Zvolme bázi (tradiční, až na komplexní jednotky Pauliho matice)

$$J_1 = \frac{\imath}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{\imath}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Platí

$$[J_1,\, J_2] = J_3, \quad \text{další 2 vztahy cyklicky.}$$

Libovolný prvek $X \in \mathfrak{g}$ můžeme psát ve tvaru

$$X = \sum_{i=1}^{3} x_i\, J_i = \frac{\imath}{2} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + \imath x_2 \\ x_1 - \imath x_2 & -x_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Tím jsme na $\mathfrak{g}$ zavedli souřadnice x_1, x_2, x_3.

Dále na $\mathfrak{g}$ zavedeme symetrickou bilineární formu vztahem

$$B(X,\, Y) = -2 \operatorname{Tr} XY\,.$$

Tato forma je pozitivně definitní, neboť pro X tvaru (10) platí

$$-2 \operatorname{Tr} X^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,.$$

Díky tomu je zobrazení

$$\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)^* : X \mapsto f_X, \quad \langle f_X,\, Y\rangle = B(X,\, Y)\,, \tag{11}$$

vzájemně jednoznačné. Takto ztotožňujeme vektorový prostor $\mathfrak{su}(2)$ se svým duálním prostorem $\mathfrak{su}(2)^*$.

Pro jednoduchost pišme λ_k místo λ_{J_k}. Podle definice (7) a ztotožnění (11) máme

$$\lambda_k(x) = -2 \operatorname{Tr} \left(\sum x_i J_i\right) J_k = x_k\,.$$

Podle (8) je Poissonova závorka na $\mathfrak{su}(2)^* \equiv \mathbb{R}^3$ jednoznačně určena rovnostmi

$$\{x_1,\, x_2\} = x_3, \quad \text{další 2 vztahy cyklicky}\,.$$

Není těžké napsat Poissonovu závorku pro libovolné dvě funkce:

$$\{f,\, g\} = x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \text{cyklicky.} \tag{12}$$

Poissonova závorka na libovolné poissonovské varietě splňuje Leibnizovo pravidlo:

$$\{f,\, gh\} = \{f,\, g\}h + \{f,\, h\}g\,.$$

Odtud plyne, že při pevném f je zobrazení $g \mapsto \{f,\, g\}$ určeno diferenciálním operátorem 1. řádu, to jest jistým vektorovým polem γ_f. Obecně Poissonovu závorku můžeme psát ve tvaru (srovnej s (2))

$$\{f,\, g\} = \gamma_f \cdot g = -\gamma_g \cdot f\,.$$

Přitom opět platí vztah (3).

V případě Lieovy závorky (8) definované na duálu $\mathfrak{g}^*$ k Lieově algebře $\mathfrak{g}$ pišme ξ_X místo γ_{λ_X}. Zobrazení

$$\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*) : X \mapsto \xi_X$$

je homomorfismus Lieových algeber a nazývá se infinitezimální akcí. Není to nic jiného než zderivovaná koadjungovaná akce Lieovy grupy G na $\mathfrak{g}^*$, jejímuž přesnému popisu jsme se vyhnuli.

V případě závorky (12) budeme opět pro jednoduchost psát γ_k místo γ_{x_k}. Snadný výpočet dává

$$\gamma_1 = x_3\,\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\,\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \gamma_2 = x_1\,\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\,\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \gamma_3 = x_2\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\,\frac{\partial}{\partial x_2}\,.$$

Tato vektorová pole jsou tečná ke sférám se středem v počátku. Tyto sféry jsou pak přesně symplektické listy foliace na $\mathbb{R}^3$ určené poissonovskou strukturou (je nutno zahrnout i nulový poloměr, to jest jednobodovou množinu obsahující počátek).

Buď $\mathcal{O}$ sféra o poloměru $r > 0$. Na $\mathcal{O}$ zvolíme lokální komplexní souřadnice $z, \overline{z}$:

$$z = \frac{x_1 + \imath\, x_2}{r + x_3}, \quad \overline{z} = \frac{x_1 - \imath\, x_2}{r + x_3}\,.$$

Inverzní transformace má tvar

$$x_1 = r\,\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = -\imath r\,\frac{z - \overline{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_3 = r\,\frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}\,. \tag{13}$$

Tyto lokální souřadnice pokrývají celou sféru s výjimkou jediného bodu $x = (0, 0, -r)$.

Pro určení Poissonovy závorky na $\mathcal{O}$ stačí vypočítat $\{z,\, \overline{z}\}$. Přitom uplatníme pravidlo

$$\left\{f,\, \frac{1}{g}\right\} = -\frac{1}{g^2}\,\{f,\, g\}\,.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
\{z,\, \overline{z}\} &= \left\{\frac{x_1 + \imath\, x_2}{r + x_3},\, \frac{x_1 - \imath\, x_2}{r + x_3}\right\} \\
&= \frac{1}{(r + x_3)^2}\,\{x_1 + \imath\, x_2,\, x_1 - \imath\, x_2\} - \frac{x_1 - \imath\, x_2}{(r + x_3)^3}\,\{x_1 + \imath\, x_2,\, x_3\} \\
&\quad -\frac{x_1 + \imath\, x_2}{(r + x_3)^3}\,\{x_3,\, x_1 - \imath\, x_2\}\,.
\end{aligned}$$

Výsledek:

$$\{z,\,\overline{z}\} = -\frac{\imath}{2r}\,(1+|z|^2)^2\,.$$

Vektorová pole příslušná souřadnicovým funkcím:

$$\gamma_z = -\frac{\imath}{2r}\,(1+|z|^2)^2\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}},\quad \gamma_{\overline{z}} = \frac{\imath}{2r}\,(1+|z|^2)^2\,\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{14}$$

Symplektická forma na $\mathcal{O}$ je určena vztahem $\{z,\,\overline{z}\} = -\omega(\gamma_z,\,\gamma_{\overline{z}})$ (viz. (2)),

$$\omega = -\frac{2r\imath}{(1+|z|^2)^2}\,dz\wedge d\overline{z}\,.$$

Zvolme další systém komplexních souřadnic $w,\,\overline{w}$ tak, abychom pokryli celou sféru, a sice

$$w = \frac{1}{z}\,.$$

Bod $w=0$ odpovídá $z=\infty$. Platí

$$dz = -\frac{1}{w^2}\,dw$$

a

$$\omega = -\frac{2r\imath}{(1+|w|^2)^2}\,dw\wedge d\overline{w}$$

(v souřadnicích w má ω formálně stejný tvar jako v souřadnicích z).

Zvolme nyní pro souřadné systémy z a w po řadě 1-formy ν_+ a ν_- s vlastností $d\nu_\pm = \omega$:

$$\nu_+ = \frac{2r\imath\,\overline{z}}{1+|z|^2}\,dz,\quad \nu_- = \frac{2r\imath\,\overline{w}}{1+|w|^2}\,dw\,. \tag{15}$$

Vyjádříme 1-formu ν_- rovněž v souřadnicích z:

$$\nu_- = -\frac{2r\imath}{(1+|z|^2)z}\,dz\,.$$

Pochopitelně v souřadnicích z má forma ν_- pól v bodě $z=0$. Na oblasti $z\neq 0$, $z\neq\infty$ máme vztah

$$\nu_+ - \nu_- = 2r\imath\,\frac{dz}{z}\,. \tag{16}$$

Kvantovací předpis (5) mírně pozměníme. V jednotlivých souřadnicích zavádíme operátory

$$\varrho_\pm(f) = \gamma_f + \imath\,\nu_\pm(\gamma_f) + \imath\,f\,. \tag{17}$$

Při této volbě komutační vztah mezi operátory má tvar

$$[\varrho_\pm(f),\, \varrho_\pm(g)] = \varrho_\pm(\{f,\, g\})\,.$$

Na varietách s netriviální topologií jako je sféra se navíc požaduje, aby operátory $\varrho_\pm(f)$ (17) byly úzce svázány. Přesněji, v našem konkrétním příkladě budeme požadovat, aby existovala funkce φ definovaná a všude nenulová na oblasti $z \neq 0$, $z \neq \infty$ (ekvivalentně $w \neq 0$, $w \neq \infty$) s vlastností

$$\varrho_-(f) = \varphi\, \varrho_+(f)\, \varphi^{-1}\,. \tag{18}$$

Dvojice operátorů $(\varrho_+(f),\, \varrho_-(f))$ potom bude konzistentně působit v prostoru dvojic funkcí $(\psi_+,\, \psi_-)$, které jsou svázány vztahem

$$\psi_- = \varphi\, \psi_+\,. \tag{19}$$

Konzistencí je míněna rovnost

$$\varrho_-(f)\psi_- = \varphi\, \varrho_+(f)\psi_+\,,$$

která již plyne ze vztahů (18), (19). Ve fyzice se vztahy (18), (19) běžně nazývají kalibračními transformacemi. V diferenciální geometrii se φ nazývá přechodovou funkcí (transition function) a určuje jednorozměrný komplexní fibrovaný prostor (line bundle) nad sférou jako bazickým prostorem.

Rovnost (18) můžeme přepsat jako

$$\imath\, \nu_-(\gamma_f) = -\varphi^{-1}\, \gamma_f \cdot \varphi + \imath\, \nu_+(\gamma_f)\,,$$

či ekvivalentně

$$\nu_+ - \nu_- = -\imath\, \varphi^{-1}\, d\varphi\,.$$

Po dosazení z (16) dostáváme

$$-2r\,\frac{dz}{z} = \frac{d\varphi}{\varphi}\,.$$

Požadovaná funkce φ existuje, právě když poloměr r je polocelé číslo,

$$r = \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{20}$$

(bez problémů můžeme zahrnout i nulový poloměr), a je rovna

$$\varphi(z) = z^{-n}\,. \tag{21}$$

Na vztah (20) můžeme pohlížet jako na kvantovací podmínku.

Vyjádříme vektorová pole γ_k příslušná funkcím $x_k = x_k(z,\, \overline{z})$ (13). Zřejmě

$$\gamma_k = \frac{\partial x_k}{\partial z}\, \gamma_z + \frac{\partial x_k}{\partial \overline{z}}\, \gamma_{\overline{z}}\,,$$

kde vektorová pole γ_z, $\gamma_{\overline{z}}$ jsme nalezli ve vztahu (14). Přímočarý výpočet dává

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\imath}{2}\,(1-z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\imath}{2}\,(1-\overline{z}^2)\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,, \\
\gamma_2 &= -\frac{1}{2}\,(1+z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\,(1+\overline{z}^2)\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,, \\
\gamma_3 &= -\imath\,z\,\frac{\partial}{\partial z} + \imath\,\overline{z}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

Přitom jsou splněny komutační vztahy

$$[\gamma_1,\,\gamma_2] = \gamma_3, \quad \text{další 2 vztahy cyklicky}\,.$$

Místo $\varrho_+(\lambda_{J_k})$ budeme psát jednoduše $\varrho_+(J_k)$. Výpočet je opět přímočarý s využitím rovností (17), (15) a dává

$$\begin{aligned}
\varrho_+(J_1) &= \frac{\imath}{2}\,(1-z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\imath}{2}\,(1-\overline{z}^2)\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \imath\,\frac{n}{2}\,z\,, \\
\varrho_+(J_2) &= -\frac{1}{2}\,(1+z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\,(1+\overline{z}^2)\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \frac{n}{2}\,z\,, \\
\varrho_+(J_3) &= -\imath\,z\,\frac{\partial}{\partial z} + \imath\,\overline{z}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \imath\,\frac{n}{2}\,z\,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Operátory (23) je opět třeba redukovat. V tomto případě invariantní podprostor bude tvořen holomorfními funkcemi. Transformační vztah (19) a tvar funkce φ (21) ale představují silné omezení. Je-li $\psi_+(z)$ holomorfní funkce na $\mathbb{C}$, potom $\psi_-(w) = w^n\,\psi_+(1/w)$ musí být rovněž holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ včetně bodu $w=0$ (to jest $z=\infty$). Tato podmínka je splněna právě tehdy, je-li $\psi_+(z)$ polynom stupně nejvýše n.

Ve výsledných vzorečcích vypustíme index $+$. Pro dané $n \in \mathbb{Z}_+$ operátory

$$\begin{aligned}
\varrho(J_1) &= \frac{\imath}{2}\,(1-z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} + \imath\,\frac{n}{2}\,z\,, \\
\varrho(J_2) &= -\frac{1}{2}\,(1+z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n}{2}\,z\,, \\
\varrho(J_3) &= -\imath\,z\,\frac{\partial}{\partial z} + \imath\,\frac{n}{2}\,z\,,
\end{aligned} \tag{24}$$

působí v prostoru

$$\mathcal{H}_n = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{1, z, \ldots, z^n\}$$

a splňují komutační relace

$$[\varrho(J_1),\,\varrho(J_2)] = \varrho(J_3), \quad \text{další 2 vztahy cyklicky}\,.$$

Operátory (24) definují $(n+1)$-rozměrnou irreducibilní reprezentaci Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$. Za pozornost jistě stojí fakt, že jsou tím vyčerpány všechny irreducibilní reprezentace $\mathfrak{su}(2)$ (jak je dobře známo z libovolné učebnice kvantové mechaniky zabývající se momentem hybnosti či naopak z libovolné učebnice zabývající se teorií reprezentací jednoduchých Lieových algeber).

Metodu orbit, kterou jsme ilustrovali na jednom specielním příkladu, lze aplikovat na libovolnou Lieovu grupu. Pro mnohé běžně používané Lieovy grupy tato konstrukce dává vynikající výsledky a vede na všechny či "skoro všechny" irreducibilní reprezentace. Pro některé specielní podtřídy Lieových grup je tento výsledek dokázán rigorózně. Zcela obecné a univerzální tvrzení tohoto typu, pokud je mi známo, neexistuje.

3 Poissonovy grupy

Jeden z možných pohledů na kvantové grupy je, že představují kvantování Poissonových (Lieových) grup. Poissonova grupa je Lieova grupa, na které je navíc zavedena Poissonova závorka, a obě struktury jsou v jistém smyslu v souladu. Upřesněme tyto pojmy.

Jsou-li $(M, \{\ ,\ \}_M)$ a $(N, \{\ ,\ \}_N)$ dvě Poissonovy variety, potom na kartézském součinu $M \times N$ lze rovněž přirozeným způsobem zavést Poissonovu závorku. Ve specielním případě, kdy v obou funkcích, které vystupují jako argumenty Poissonovy závorky, jsou proměnné $x \in M$ a $y \in N$ separovány, platí rovnost

$$\{f(x)g(y),\, f'(x)g'(y)\} = \{f(x),\, f'(x)\}_M\, g(y)g'(y) + f(x)f'(x)\, \{g(y),\, g'(y)\}_N\,. \tag{25}$$

Tato závorka se pak jednoznačně prodlužuje na libovolné funkce z prostoru $C^\infty(M \times N)$.

O zobrazení $F : (M, \{\ ,\ \}_M) \to (N, \{\ ,\ \}_N)$ řekneme, že je poissonovské, jestliže pull-back zobrazení

$$F^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M), \quad F^*f = f \circ F\,,$$

zachovává Poissonovu závorku, to jest jestliže platí

$$F^*\{f,\, g\}_N = \{F^*f,\, F^*g\}_M\,.$$

Poissonova grupa je Lieova grupa, která je současně Poissonovou varietou $(G, \{\ ,\ \})$, přičemž grupové násobení

$$m : G \times G \to G$$

je poissonovské zobrazení.

Příklad: SU(2)

Prvky $SU(2)$ jsou unimodulární matice

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1\,.$$

Unitarita $g^* = g^{-1}$ znamená, že

$$g_{21} = -\overline{g_{12}}, \; g_{22} = \overline{g_{11}}\,.$$

Na $SU(2)$ zavedeme funkce a, b, c, d předpisem

$$a(g) = g_{11}, \; b(g) = g_{12}, \; c(g) = g_{21}, \; d(g) = g_{22}\,.$$

Tyto funkce nejsou nezávislé, splňují vztahy

$$ad - bc = 1 \tag{26}$$

a

$$c = -b^*, \; d = a^*\,. \tag{27}$$

Zde symbol * značí involuci v prostoru komplexních funkcí $C^\infty(SU(2))$ (stejně tak jako v případě libovolné jiné variety) definovanou přirozeně takto:

$$f^*(g) = \overline{f(g)}\,. \tag{28}$$

Často je výhodné omezit se na podalgebru algebry $C^\infty(SU(2))$ (násobení funkcí se zavádí samozřejmě bodově jako $(fg)(a) = f(a)g(a)$) generovanou funkcemi a, b, c, d. Tuto podalgebru můžeme popsat jako faktoralgebru

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[a, b, c, d]/\text{relace (26), (27)} \tag{29}$$

($\mathbb{C}[x, y, \dots]$ značí algebru komplexních polynomů v proměnných $x, y, \dots$). Poissonova závorka je předepsána na generátorech a, b, c, d následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \{a,\, b\} &= \imath\, ab, \quad \{a,\, c\} = \imath\, ac, \\ \{b,\, c\} &= 0, \quad \{a,\, d\} = 2\imath\, bc. \end{aligned}$$

Další rovnosti plynou z relací (27) a z toho, že Poissonova závorka je reálná, to jest že platí

$$\{f,\, g\}^* = \{f^*,\, g^*\}\,. \tag{30}$$

Jako ukázku ověříme rovnost

$$\{m^*a,\, m^*b\} = m^*\{a,\, b\}\,, \tag{31}$$

kde $m : SU(2) \times SU(2) \to SU(2)$ je grupové násobení.

Nejprve si všimněme, že pro libovolné variety M a N lze přirozeně vnořit

$$C^\infty(M) \otimes C^\infty(N) \hookrightarrow C^\infty(M \times N)\,. \tag{32}$$

Jsou-li dány funkce $f(x) \in C^\infty(M)$ a $g(y) \in C^\infty(N)$, pak jejich tenzorový součin $f \otimes g$ můžeme chápat jako funkci na varietě $M \times N$:

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)\,. \tag{33}$$

Tento fakt využijeme i v dalších kapitolách.

Určeme m^*a, m^*b, m^*c, $m^*d \in C^\infty(SU(2) \times SU(2))$. Platí

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m^*a(g_1, g_2) & m^*b(g_1, g_2) \\ m^*c(g_1, g_2) & m^*d(g_1, g_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(g_1g_2) & b(g_1g_2) \\ c(g_1g_2) & d(g_1g_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(g_1) & b(g_1) \\ c(g_1) & d(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(g_2) & b(g_2) \\ c(g_2) & d(g_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

S využitím vnoření (32), (33) můžeme psát

$$\begin{aligned} m^*a = a \otimes a + b \otimes c, \quad m^*b = a \otimes b + b \otimes d, \\ m^*c = c \otimes a + d \otimes c, \quad m^*d = c \otimes b + d \otimes d. \end{aligned} \tag{34}$$

Povšimněme si, že

$$m^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}\,, \tag{35}$$

kde algebru $\mathcal{A}$ jsme zavedli v (29).

Levá strana (31) je podle pravidla (25) rovna

$$\begin{aligned} \{a \otimes a + b \otimes c,\, a \otimes b + b \otimes d\} &= \{a,\, b\} \otimes ad + \{b,\, a\} \otimes cb + a^2 \otimes \{a,\, b\} \\ &\quad + ab \otimes \{a,\, d\} + ba \otimes \{c,\, b\} + b^2 \otimes \{c,\, d\} \\ &= \imath(ab \otimes ad - ab \otimes bc + a^2 \otimes ab \\ &\quad + 2ab \otimes bc + b^2 \otimes bc) \\ &= \imath(a \otimes a + b \otimes c)(a \otimes b + b \otimes d)\,. \end{aligned}$$

Poslední výraz se ale rovná pravé straně (31).

4 Hopfovy algebry

Kvantová grupa coby matematická struktura je Hopfova algebra. Hopfova algebra je bialgebra A nad tělesem $\mathbf{k}$ (my budeme pracovat s tělesem $\mathbf{k} = \mathbb{C}$), na které je navíc definován tzv. antipode $S : A \to A$. Bialgebra je vektorový prostor A, na kterém je zavedena současně struktura algebry s násobením $\mu : A \otimes A \to A$ a koalgebry s konásobením $\Delta : A \to A \otimes A$, dále jednotka $\eta : \mathbf{k} \to A$ a kojednotka $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$, přičemž tato zobrazení vyhovují určitým axiomům (jsou spolu přirozeným způsobem svázána, přesněji níže).

Konásobení je duální zobrazení vzhledem k násobení. Znázorňujeme-li zobrazení pomocí diagramů, pak dualita se projeví jednoduše tak, že se všude změní orientace šipek. Například požadujeme, aby násobení μ bylo asociativní. Tento požadavek můžeme znázornit pomocí komutativního diagramu

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[dr, "\mu"] & \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[ur, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & & \mathcal{A}\,. \\
& \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd} \tag{36}$$

Duálně požadujeme, aby konásobení Δ bylo koasociativní, což odpovídá komutativnímu diagramu

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[dl, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & & \mathcal{A}\,. \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\
& \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] &
\end{tikzcd} \tag{37}$$

Jednotka $1 \in \mathcal{A}$ implikuje vnoření tělesa $\mathbf{k}$ do algebry, to jest zobrazení $\eta : \mathbf{k} \to \mathcal{A} : x \mapsto x1$. Kojednotka ε je duální k zobrazení η. Jestliže je komutativní následující diagram, ve kterém vystupuje η,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{A}\otimes\mathbf{k}\,, \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd} \tag{38}$$

pak budeme požadovat, aby byl komutativní i diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k}\otimes\mathcal{A} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & \mathcal{A}\otimes\mathbf{k}\,. \\
& \mathcal{A} \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd} \tag{39}$$

Zde přirozeně ztotožňujeme tenzorový součin $\mathbf{k}\otimes\mathcal{A}$ s $\mathcal{A}$ ($x\otimes f = 1\otimes xf \equiv xf$), podobně ztotožňujeme $\mathcal{A}\otimes\mathbf{k}$ s $\mathcal{A}$.

Význam antipodu S se nejlépe ozřejmí na konkrétních příkladech, které uvádíme níže.

Algebrou budeme rozumět trojici $(\mathcal{A}, \mu, \eta)$, kde $\mathcal{A}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{k}$, zobrazení μ a η jsou lineární a diagramy (36), (38) jsou komutativní. *Koalgebra* je trojice $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon)$, kde $\mathcal{A}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{k}$, zobrazení Δ a ε jsou lineární a diagramy (37), (39) jsou komutativní.

Bialgebra je pětice $(\mathcal{A}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$, přičemž $(\mathcal{A}, \mu, \eta)$ je algebra a $(\mathcal{A}, \Delta, \varepsilon)$ je koalgebra. Dále struktury algebry a koalgebry musí být, jak bylo možno očekávat, spolu určitým způsobem svázány. Jednou z ekvivalentních možností, jak tak učinit, je požadavek, aby konásobení $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ bylo homomorfismem algeber. Zde využíváme toho, že na $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ lze zavést násobení, a tedy strukturu algebry, předpisem

$$(f \otimes g)(f' \otimes g') = ff' \otimes gg' \,.$$

Stejně tak musí být kojednotka $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbf{k}$ homomorfismem algeber.

Ekvivalentní podmínka je, aby zobrazení μ a η byly homomorfismy koalgeber.

Antipode je lineární zobrazení $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, které splňuje rovnosti

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon \,.$$

Lze ukázat, že antipode je antihomomorfismem algebry: $S(fg) = S(g)S(f)$. *Hopfova algebra* je bialgebra s antipodem.

Příklad 1: algebra funkcí na konečné grupě

Buď G konečná grupa a $\mathcal{A} = \mathrm{Fun}(G)$ algebra funkcí na G s bodovým násobením, $\dim \mathcal{A} = |G|$ (počet prvků grupy). Je-li $x \in \mathbf{k}$, pak $\eta(x)$ je funkce na G identicky rovna x. Dále využijeme toho, že vnoření $\mathrm{Fun}(G) \otimes \mathrm{Fun}(G) \hookrightarrow \mathrm{Fun}(G \times G)$ je isomorfismus (viz. (32); dimense obou prostorů je rovna $|G|^2$). Je-li $f \in \mathcal{A}$, pak Δf jako prvek z $\mathrm{Fun}(G \times G) \equiv \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ definujeme předpisem

$$\Delta f(a_1, a_2) = f(a_1 \cdot a_2)$$

($a_1 \cdot a_2$ je násobení v grupě G). Kojednotku a antipode zavádíme následovně:

$$\varepsilon(f) = f(e), \quad Sf(a) = f(a^{-1})$$

($e \in G$ je jednotkový prvek).

Příklad 2: grupová algebra konečné grupy

Buď opět G konečná grupa a nechť $\mathcal{U}$ je grupová algebra G. $\mathcal{U}$ je vektorový prostor, jehož bázi tvoří elementy grupy G, tedy prvky $\mathcal{U}$ jsou lineární kombinace

$$x = \sum_{a \in G} x_a \, a, \quad x_a \in \mathbf{k} \,. \tag{40}$$

Opět $\dim \mathcal{U} = |G|$. Násobení stačí předepsat na bazických vektorech $a, b \in G$ a v tom případě se shoduje s grupovým násobením v G, $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$. Dále $\eta(x) = x\, e$, $x \in \mathbf{k}$. Obdobně konásobení, kojednotku a antipode stačí předepsat na prvcích báze. Definujeme

$$\Delta a = a \otimes a, \; \varepsilon(a) = 1, \; Sa = a^{-1}, \quad a \in G \,.$$

Příklady 1 a 2 jsou navzájem duální. *Párováním* mezi $\mathcal{U}$ a $\mathcal{A}$ nazveme bilineární zobrazení ($x \in \mathcal{U}$ je tvaru (40))

$$\langle \, , \, \rangle : \mathcal{U} \times \mathcal{A} \to \mathbf{k}, \; (x, f) \mapsto \langle x, \, f \rangle = \sum_{a \in G} x_a \, f(a) \,.$$

Vlastnosti, které párování musí splňovat, jsou tyto: je nedegenerované ($\langle x,\, f\rangle = 0,\, \forall x \Rightarrow f = 0$ a obdobně pro druhý argument) a splňuje rovnosti

$$\langle \Delta x,\, f\otimes g\rangle = \langle x,\, \mu(f\otimes g)\rangle, \quad \langle x\otimes y,\, \Delta f\rangle = \langle \mu(x\otimes y),\, f\rangle,$$
$$\langle \eta(\lambda),\, f\rangle = \lambda\, \varepsilon(f), \quad \langle x,\, \eta(\lambda)\rangle = \varepsilon(x)\,\lambda, \quad \langle Sx,\, f\rangle = \langle x,\, Sf\rangle.$$

Zde využíváme toho, že párování mezi $\mathcal{U}$ a $\mathcal{A}$ indukuje párování mezi $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$ a $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$:

$$\langle x\otimes y,\, f\otimes g\rangle = \langle x,\, f\rangle\, \langle y,\, g\rangle\,.$$

Příklad 3: algebra funkcí na $SU(2)$

Konstrukce Hopfovy algebry v tomto případě je téměř shodná s příkladem 1, pouze $SU(2)$ není konečná grupa. Jedinou modifikací je, že za $\mathcal{A}$ nevolíme algebru funkcí $\mathrm{Fun}(SU(2))$ a dokonce ani $C^\infty(SU(2))$, ale podalgebru (29) generovanou prvky $a,\, b,\, c,\, d$. Konásobení Δ se shoduje se zobrazením m^* (34), které je podle (35) dobře definované. Kojednotka a antipode jsou definovány obdobně jako v příkladu 1. Konkrétně dostáváme

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1, \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \tag{41}$$

a

$$Sa = d,\, Sb = -c,\, Sc = -b,\, Sd = a\,.$$

Zdůrazněme, že podle (27) je na $\mathcal{A}$ navíc definovaná involuce (kterou jsme ostatně mohli zavést i v příkladu 1 pomocí vztahu (28)).

Příklad 4: univerzální obalující algebra

Libovolnému vektorovému prostoru V nad $\mathbf{k}$ můžeme přiřadit tenzorovou algebru TV,

$$TV = \mathbf{k} \oplus V \oplus (V\otimes V) \oplus (V\otimes V\otimes V) \oplus \dots\,.$$

Násobením je tenzorový součin $\otimes$.

Buď $\mathfrak{g}$ Lieova algebra. Univerzální obalující algebra je $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g}/\mathcal{I}$, kde $\mathcal{I}$ je dvoustranný ideál generovaný prvky

$$x\otimes y - y\otimes x - [x,\, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}\,.$$

Po faktorizaci budeme opět značit násobení, jak je zvykem, tečkou "$\cdot$" (a i ta se vynechává).

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ je nekonečnorozměrná asociativní algebra. Podrobnější informaci dává PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) věta: *je-li* $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ *libovolná pevně zvolená báze v* $\mathfrak{g}$, *pak prvky*

$$x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \dots x_N^{n_N}, \quad n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{Z}_+\,,$$

tvoří (algebraickou) bázi v $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Důsledkem PBW věty je, že $\mathfrak{g}$ je vnořena do $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ jako vektorový prostor a samozřejmě $\mathfrak{g}$ generuje $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ se stává Hopfovou algebrou, jestliže definujeme konásobení, kojednotku a antipode následovně (stačí předepsat hodnoty na generátorech):

$$\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ \varepsilon(x) = 0,\ Sx = -x, \quad x \in \mathfrak{g}\,.$$

5 Kvantové grupy

Kvantovou grupu můžeme chápat jako kvantování Poissonovy grupy. Kvantování budeme pojímat o něco abstraktněji než dosud a funkcím na poissonovské varietě nebudeme přímo přiřazovat operátory, ale celé algebře funkcí přiřadíme novou (kvantovanou) algebru, která bude obecně nekomutativní. K operátorům se přechází pomocí reprezentací kvantované algebry.

Předpokládejme, že G je Poissonova grupa a $\mathcal{A}$ je algebra funkcí na G s (konečnou) množinou generátorů $\{f, g, \dots\}$. Dále předpokládáme, že $\mathcal{A}$ je nekonečnorozměrná Lieova algebra vzhledem k Poissonově závorce na G a Hopfova algebra s konásobením $\Delta = m^*$ ($m : G \times G \to G$ stále značí grupové násobení). Příkladem je $G = SU(2)$ s algebrou $\mathcal{A}$ (29).

Kvantová algebra $\mathcal{A}_h$ bude deformací algebry $\mathcal{A}$ závisející na parametru deformace h. $\mathcal{A}_h$ bude mít stejnou množinu generátorů jako $\mathcal{A}$, ale pro odlišení je dočasně označíme stříškou: $\{\widehat{f}, \widehat{g}, \dots\}$. V limitě $h \to 0$ musí $\mathcal{A}_h$ přejít v komutativní algebru $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$. Algebra $\mathcal{A}_h$ by měla splňovat některé další "přirozené" (a do určité míry heuristické) požadavky. Zdůrazněme následující dva:

- Poissonovskou strukturu lze získat z $\mathcal{A}_h$ v "semiklasické" limitě $h \to 0$ (jestliže počítáme do prvního řádu v parametru h). Přesněji, požadujeme, aby generátory splňovaly vztah

  $$\widehat{f}\widehat{g} - \widehat{g}\widehat{f} = \imath h\,\widehat{\{f,\, g\}} + O(h^2)\,.$$

  Poznámka: výsledek Poissonovy závorky $\{f,\, g\}$ můžeme opět vyjádřit pomocí generátorů (jako polynomiální výraz) a poté mu přiřadíme prvek algebry $\mathcal{A}_h$, což je naznačeno stříškou. $\mathcal{A}_h$ je sice nekomutativní, ale ve skutečnosti zde už na pořadí nezáleží, neboť počítáme do prvního řádu h a před Poissonovou závorkou již stojí h.

- $\mathcal{A}_h$ musí být Hopfovou algebrou.

Jako příklad popíšeme nejjednodušší netriviální kvantovou grupu $SU_q(2)$, která je kvantováním Poissonovy grupy $SU(2)$ z kapitoly 3. Kromě toho zavedeme q-deformaci univerzální obalující algebry $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$, kterou jsme rozebrali v příkladu 4 v kapitole 4. Lze ukázat, že Hopfova algebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ je duální k $SU_q(2)$.

Ve všech příkladech je h reálný parametr a pokládáme $q = e^{-h}$. Ve skutečnosti všechny výrazy budou explicitně záviset přímo na parametru q.

Příklad 1: $SU_q(2)$

Algebra $\mathcal{A}$ funkcí na kvantové grupě $SU_q(2)$ je generována prvky a, b, c, d, které splňují relace

$$ab = qba,\ ac = qca,\ bc = cb,$$
$$ad - qbc = da - q^{-1}bc = 1\,.$$

Na $\mathcal{A}$ je zavedena involuce vztahy

$$a^* = d,\ b^* = -qc$$

(involuce je antihomomorfismus: $(fg)^* = g^* f^*$). Konásobení je formálně stejné jako v nedeformovaném případě (viz. (34))

$$\Delta a = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta b = a \otimes b + b \otimes d,$$
$$\Delta c = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta b = c \otimes b + d \otimes d.$$

Rovněž kojednotka je formálně stejná jako v klasickém případě (41). Antipode je zaveden následovně:

$$Sa = d,\ Sb = -q^{-1}b,\ Sc = -qc,\ Sd = a.$$

Povšimněte si, že matice

$$\begin{pmatrix} Sa & Sb \\ Sc & Sd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

je inverzní k matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(pokud používáme pravidla pro násobení v algebře $\mathcal{A}$).

Příklad 2: $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$

Výhodné je pracovat s komplexifikovanou Lieovou algebrou – připouštíme komplexní lineární kombinace jejich prvků. Konkrétně pokládáme (viz. (9))

$$E = -\imath\, J_1 - J_2, \quad F = -\imath\, J_1 + J_2, \quad H = -2\imath\, J_3\,. \tag{42}$$

Elementy E, F, H tvoří bázi (nad $\mathbb{C}$) a splňují komutační vztahy

$$[E,\, F] = H, \quad [H,\, E] = 2E, \quad [H,\, F] = -2F\,.$$

Komplexifikace Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$ je izomorfní $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (komplexní 2×2 matice s nulovou stopou). V $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ prvkům E, F, H odpovídají matice

$$E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Komplexifikace univerzální obalující algebry $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$ je izomorfní $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$, reálná struktura ale zůstává zakódována v involuci

$$E^*=F,\quad F^*=E,\quad H^*=H\,.$$

Deformovaná univerzální obalující algebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ je komplexní Hopfova algebra s involucí se souborem generátorů K, K^{-1}, E, F. Pod K je třeba si představit element $q^{H/2}\equiv e^{-hH/2}$. Algebra je určena relacemi

$$\begin{gathered}K\,K^{-1}=K^{-1}K=1,\quad KE=q\,EK,\quad KF=q^{-1}FK,\\ [E,\,F]=\tfrac{1}{q-q^{-1}}(K^2-K^{-2}).\end{gathered}$$

Na generátorech je předepsáno konásobení

$$\Delta K=K\otimes K,\quad \Delta E=E\otimes K^{-1}+K\otimes E,\quad \Delta E=E\otimes K^{-1}+K\otimes E,$$

kojednotka

$$\varepsilon(K)=1,\quad \varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0,$$

antipode

$$SK=K^{-1},\quad SE=-q^{-1}E,\quad SF=-q\,F\,,$$

a rovněž involuce

$$K^*=K,\quad E^*=F\,.$$

6 Příklad: q-deformovaná metoda orbit pro $\mathfrak{su}(2)$

Přepišme ještě jednou výsledek z kapitoly 2. Tentokrát vyjádříme všechny vztahy pomocí báze $\{E,\,F,\,H\}$ v komplexifikaci algebry $\mathfrak{su}(2)$ (viz. (42)). Z (22) zjistíme, že holomorfní části vektorových polí pro tyto prvky jsou (značíme $\xi_X=\gamma_{\lambda_X}$)

$$\xi_E=\frac{\partial}{\partial z},\quad \xi_F=-z^2\,\frac{\partial}{\partial z},\quad \xi_H=-2z\,\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{43}$$

Algebra polynomů $\mathbb{C}[z]$ se tak stává levým $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$ modulem, když levá akce generátorů je zřejmě následující:

$$\xi_E\cdot z^k=k\,z^{k-1},\quad \xi_F\cdot z^k=-k\,z^{k+1},\quad \xi_H\cdot z^k=-2k\,z^k\,.$$

Výsledkem metody orbit je v podstatě modifikace této akce tím, že k vektorovým polím (43) přičítáme obecně nenulové členy 0-tého řádu. Ze vztahů (24) odvodíme, že

$$\varrho(E) = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \varrho(F) = -z^2\,\frac{\partial}{\partial z} + n\,z, \quad \varrho(H) = -2z\,\frac{\partial}{\partial z} + n\,z$$

a tedy

$$\varrho(E)\cdot z^k = k\,z^{k-1}, \quad \varrho(F)\cdot z^k = (n-k)\,z^{k+1}, \quad \varrho(H)\cdot z^k = (n-2k)\,z^k\,.$$

Na závěr uvedeme q-deformovanou akci algebry $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ na $\mathbb{C}[z]$ bez toho, že bychom jakkoliv rozebírali způsob jejího odvození. Nejprve zaveďme symbol

$$[c] = \frac{q^c - q^{-c}}{q - q^{-1}}, \quad c \in \mathbb{C}\,.$$

Původní (nemodifikovaná) levá akce $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ na $\mathbb{C}[z]$ je předepsána na generátorech:

$$\xi(K^{\pm1})\cdot z^k = q^{\mp k}\,z^k, \quad \xi(E)\cdot z^k = [k]\,z^{k-1}, \quad \xi(F)\cdot z^k = -[k]\,z^{k+1}.$$

Modifikovaná akce opět závisí na parametru $n \in \mathbb{Z}_+$ a vypadá následovně:

$$\xi(K^{\pm1})\cdot z^k = q^{\pm(\frac{n}{2}-k)}\,z^k, \quad \xi(E)\cdot z^k = [k]\,z^{k-1}, \quad \xi(F)\cdot z^k = [n-k]\,z^{k+1}.$$

7 Literatura

Geometrické kvantování

1. J.-M. Souriau: *Structure des Systemes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.

2. J. Sniatycki: *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1980.

3. D. J. Simms, N. M. J. Woodhous: *Lectures on Geometric Quantization*, Lecture Notes in Physics **53**, 1976.

4. N. E. Hurt: *Geometric Quantization in Action*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

Metoda orbit

1. B. Kostant: *Quantization and unitary representations*, in *Lectures in Modern Analysis III*, C. T. Taam (ed.), Lecture Notes in Mathematics **170**, pp. 87-208,Springer-Verlag, Berlin, 1970.

2. A. A. Kirillov: *Elementy Teorii Predstavlenij*, Nauka, 1978. anglická verze: *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, New York, 1976.

Poissonovy grupy

1. J.-H. Lu, A. Weinstein: *Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decomposition*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 501-26.

Hopfovy algebry

1. E. Abe: *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

Kvantové grupy

1. V. G. Drinfel'd: *Quantum groups*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, 1986, A. M. Gleason (ed.), pp. 798-820, American Mathematical Society, Providence, RI.

2. M. Jimbo: *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*¸ Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-9.

3. M. Jimbo: *A q-analogue of U(gl(N+1)), Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-52.

4. S. L. Woronowicz: *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987) 613-65.

5. L. D. Faddeev, N. Reshetikhin, L. Takhtajan: *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, in *Algebraic analysis*, Vol. 1, M. Kashiwara and T. Kawai (eds.), pp. 129-39, Academic Press, New York.

6. V. Chari, A. Pressley: *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994.

Deformovaná metoda orbit

1. P. Šťovíček: *A construction of representations and quantum homogenenous spaces*, Lett. Math. Phys. **47** (1999) 125-138.